

Aufgabenstellung: Berechnung der Funktionen  $\sin a$  und  $\cos a$ ,  $a$  gegeben in der Gleitkommaarstellung

$$a = m_a \cdot 10^{e_a}$$

- Voraussetzung:
- 1) Das Programm zur Berechnung der Sinusfunktion wird unter der Adresse  $n_{12}$  das Programm zur Berechnung der Cosinusfunktion wird unter der Adresse  $n_{13}$  aufgerufen.
  - 2) Vor Aufruf eines der beiden Unterprogramme hat das Argument  $a$  im X-Register zu stehen. Das Resultat  $r = \sin a$ , bzw.  $r = \cos a$  steht als normalisierte Gleitkommazahl sowohl im X- als auch im Y-Register zur Verfügung.
  - 3) Im Programm werden folgende Schnellspeicherzellen benutzt:  

1016	zur Umspeicherung des Rückkehradressenspeichers RAS, der beiden Zählregister ZR2, ZR1 und der Bedingungspeicher B1, ..., B6
1026	} als Zwischenspeicher
1027	
  - 4) Zur Durchführung dieses Programmes werden als weitere Unterprogramme die Multiplikationsprogramme im Festkomma FKM1 und FKM2 vorausgesetzt, sowie das Programm Bereichsüberschreitung "BUEB".

Programmablauf:

Die Berechnung der Sinusfunktion erfolgt auf Grund der trigonometrischen Reihe

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \mp \dots \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

Da die Argumente  $x$  größer als 1 sein können, wird, zur Vermeidung von größeren Abrundungsfehlern, das Approximationspolynom nach folgender abgewandelter Reihe aufgerechnet:

$$\sin x = x \left[ b'_1 + x^2 \left[ b'_3 + 0,1x^2 \left[ b'_5 - 0,1x^2 \left[ b'_7 + 0,1x^2 b'_9 \right] \right] \right] \right] \quad (2)$$

Hierin bedeuten:

$$\begin{aligned} b'_1 &= b_1 = 0,999999 \ 9765 \\ b'_3 &= b_3 = -0,166666 \ 4759 \\ b'_5 &= 10 b_5 = 0,083328 \ 9922 \\ b'_7 &= 10^2 b_7 = -0,019800 \ 8652 \\ b'_9 &= 10^3 b_9 = 0,002590 \ 4299 \end{aligned}$$

Die  $b_p$  sind die eigentlichen Polynomkoeffizienten. Auf Grund der umgestellten Formel (2) erreicht man, daß das Runden nicht stets in der selben Dezimale geschieht. Für  $x \leq \frac{\pi}{2}$  ist der maximale Fehler dann kleiner als  $3,7 \cdot 10^{-9}$ .

Das Programm ist so eingerichtet, daß der Funktionswert nur für Argumente berechnet wird, deren Betrag kleiner als 1000 ist. Außerdem wird für Argumente  $a$ , deren Betrag  $|a| \ll 1$  ( $e_a < 47$ ) ist, der Sinus durch den Bogen ersetzt,

Argumentreduzierung von  $a$  auf  $x$ ,  $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$

## c) Sinusfunktion:

- 1) Die Funktion  $\sin a$  ist eine ungerade Funktion. Daher ist für  $a < 0$

$\sin a = -\sin |a|$ , d.h. der Sinus von  $a$  ist gleich dem negativ zu nehmenden Sinuswert des positiven Argumentes.

Die Markierung für diesen Fall erfolgt mit dem Bedingungsbit J1, siehe 5).

- 2) Ist das Argument  $|a| = 2\pi \cdot n + x_1$  ( $n$ -norm. Zahl),  
dann gilt:

$$\sin |a| = \sin x_1, \quad 0 \leq x_1 < 2\pi$$

- 3) Weitere periodische Eigenschaften der Sinusfunktion er-  
lauben noch folgende Einschränkung des Argumentbereiches

- 3.1.) Ist  $x_1 \geq \pi$ , dann gilt für  $x_2 = x_1 - \pi$

$$\sin x_1 = -\sin x_2, \quad 0 \leq x_2 < \pi$$

d.h. der Sinus von  $x_1$  ist in diesen  
Fall gleich dem negativ zu nehmen-  
den Wert des positiven Argumentes  
 $x_2$ . Die Markierung des Vorzeichens  
wird mit dem Bedingungsbit J2 fest-  
gehalten (siehe 5).

- 3.2.) Ist  $x_1 < \pi$ , dann setze man  $x_2 = -(x_1 - \pi)$

$$\text{und es ist: } \sin x_1 = \sin x_2, \quad 0 \leq x_2 < \pi$$

- 4) Setzt man schließlich für den Fall, daß

$$4.1.) \quad x_2 > \pi/2 \quad x = \pi - x_2$$

$$4.2.) \quad x_2 \leq \pi/2 \quad x = x_2,$$

so ist in beiden Fällen  $\sin x_2 = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

- 5) Zur Bestimmung des Resultatvorzeichens werden die Be-  
dingungsbits J1 und J2 benutzt, und zwar für

$a < 0$  wird J1 gesetzt

$x_1 \geq 0$  wird J2 gesetzt.

Das Resultatvorzeichen ergibt sich dann aus der folgenden  
Tabelle:

	J1	N1
J2	+	-
N2	-	+

#### b) Cosinusfunktion

Wie die nachfolgenden Überlegungen zeigen, unterscheidet sich  
die Argumentreduktion für das Cosinusprogramm nur an zwei  
Stellen von der Argumentreduktion für das Sinusprogramm.

4-08 2 3 2  
Zusatz 15) Die weitere Reduzierung des Argumentbereiches  $x_2$  in ein gemeinsames Programm aufzuteilen, wobei das Cosinusprogramm in das Sinusprogramm übergeführt wird.

- 1) Die Funktion  $\cos a$  ist eine gerade Funktion. Daher ist für  $a < 0$

$\cos a = \cos |a|$  d.h. der Cosinus eines negativen Argumentes ist gleich dem Cosinus des Argumentbetrages (im Gegensatz zur Sinusfunktion).

- 2) Ist das Argument  $|a| = 2\pi n + x_1$  ( $n =$  natürl. Zahl), so gilt:

$$\cos |a| = \cos x_1 = -\sin \left( x_1 - \frac{\pi}{2} \right) = -\sin x'_1 ; \\ -\frac{\pi}{2} \leq x'_1 < \frac{\pi}{2}$$

d.h. der Cosinus der Argumentes  $x_1$  ist gleich dem negativ zu nehmenden Wert des Sinus von  $x'_1$ .

Berechnet man also den Cosinus mittels des Sinusprogramms, so ist der entsprechende Sinuswert unabhängig vom Vorzeichen von  $a$  stets negativ zu nehmen, d.h.  $\bar{J}1$  zu setzen.

- 3) Es sind gegenüber der Sinusfunktion im weiteren drei Fälle zu unterscheiden

3.1.) Ist  $x'_1 < 0$ , so setzt man  $x = -x'_1$ , was zur Folge hat, daß  $\cos x_1 > 0$  ist.

Die Markierung in diesem Fall erfolgt mit dem Bedingungsbit  $\bar{J}2$ .

3.2.) Ist  $x'_1 \geq \pi$ , so gilt der Fall 3.1.) unter a) (Sinusfunktion)

3.3.) Ist  $x'_1 < \pi$ , so gilt entsprechend Fall 3.2.) unter a) (Sinusfunktion)

- 4) Die weitere Reduzierung des Argumentbereiches von  $x_2$  auf  $x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ) erfolgt wie unter a) 4.1., bzw. 4.2. (Sinusfunktion).

- 5) Die Bestimmung des Resultatvorzeichens ergibt sich

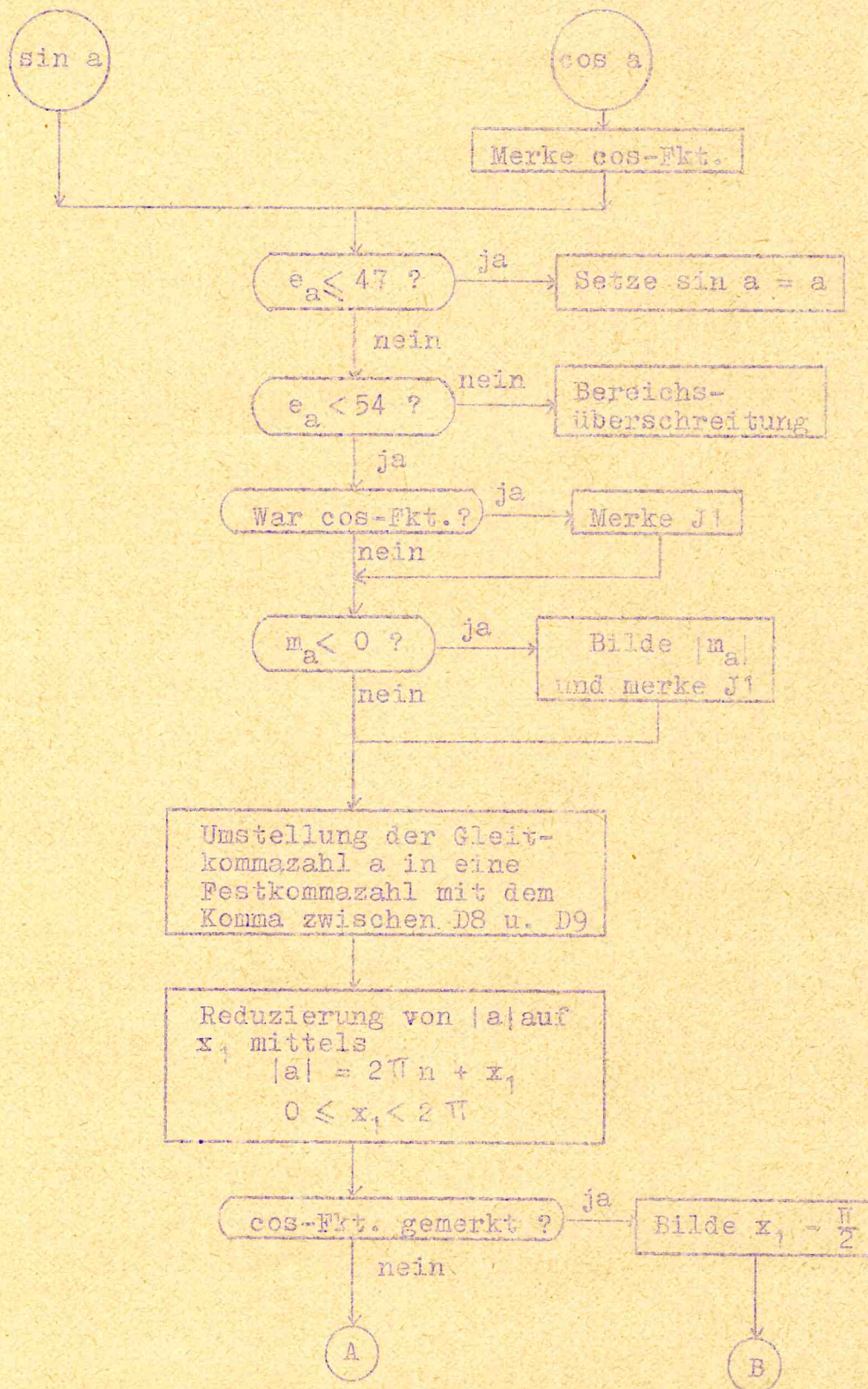
aus der Tabelle

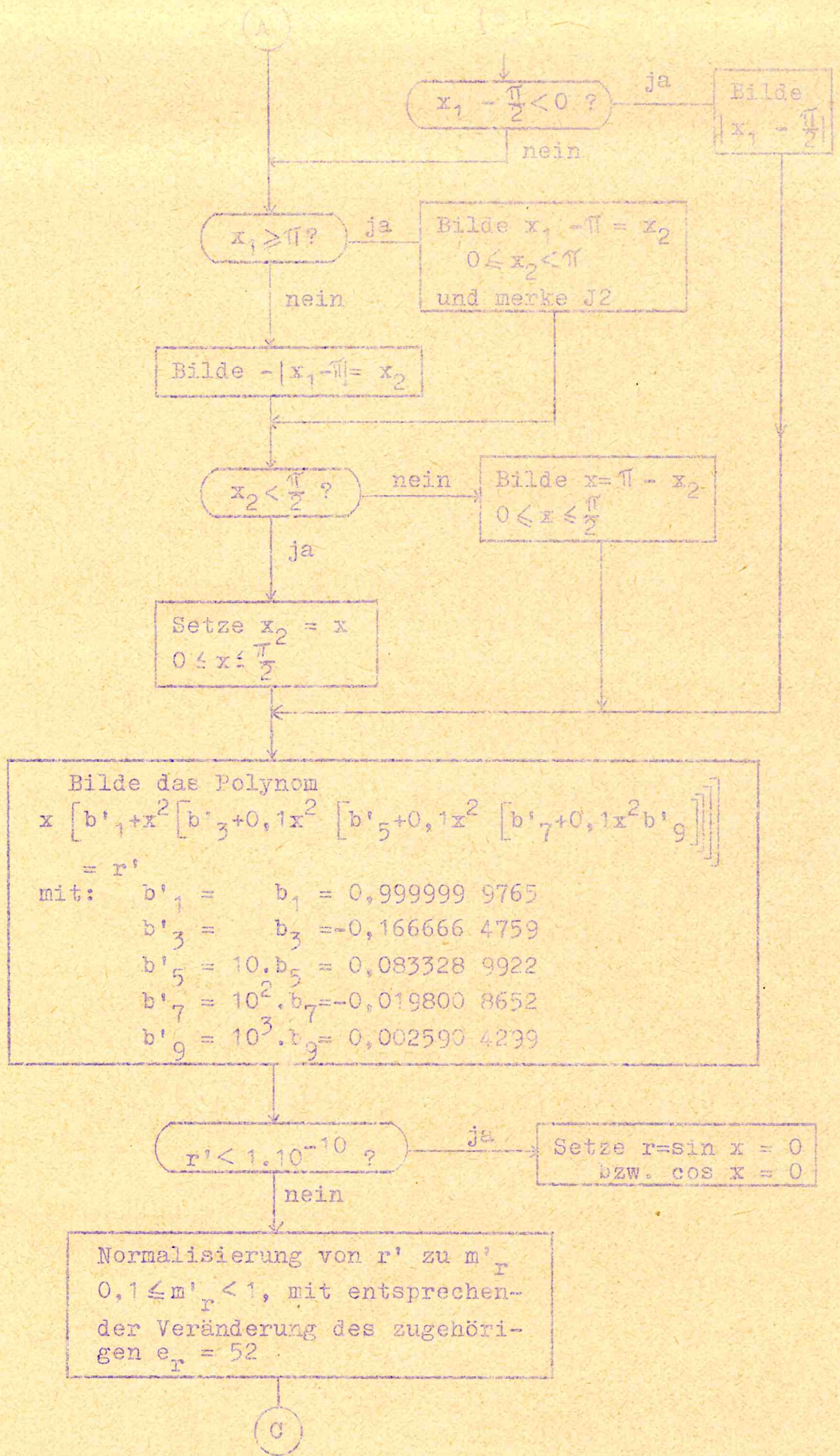
	J1	N1	
J2	+	-	(vergl. a) 5))
N2	-	+	

Der Programmablauf ist im einzelnen aus nachfolgender schematischer Übersicht zu ersehen.

Programm: Nr. 8 Berechnung der Sinus- und Cosinusfunktion  
für Argumente im Gleitkomma SCA

$$a = m_a \cdot 10^{e_a}$$





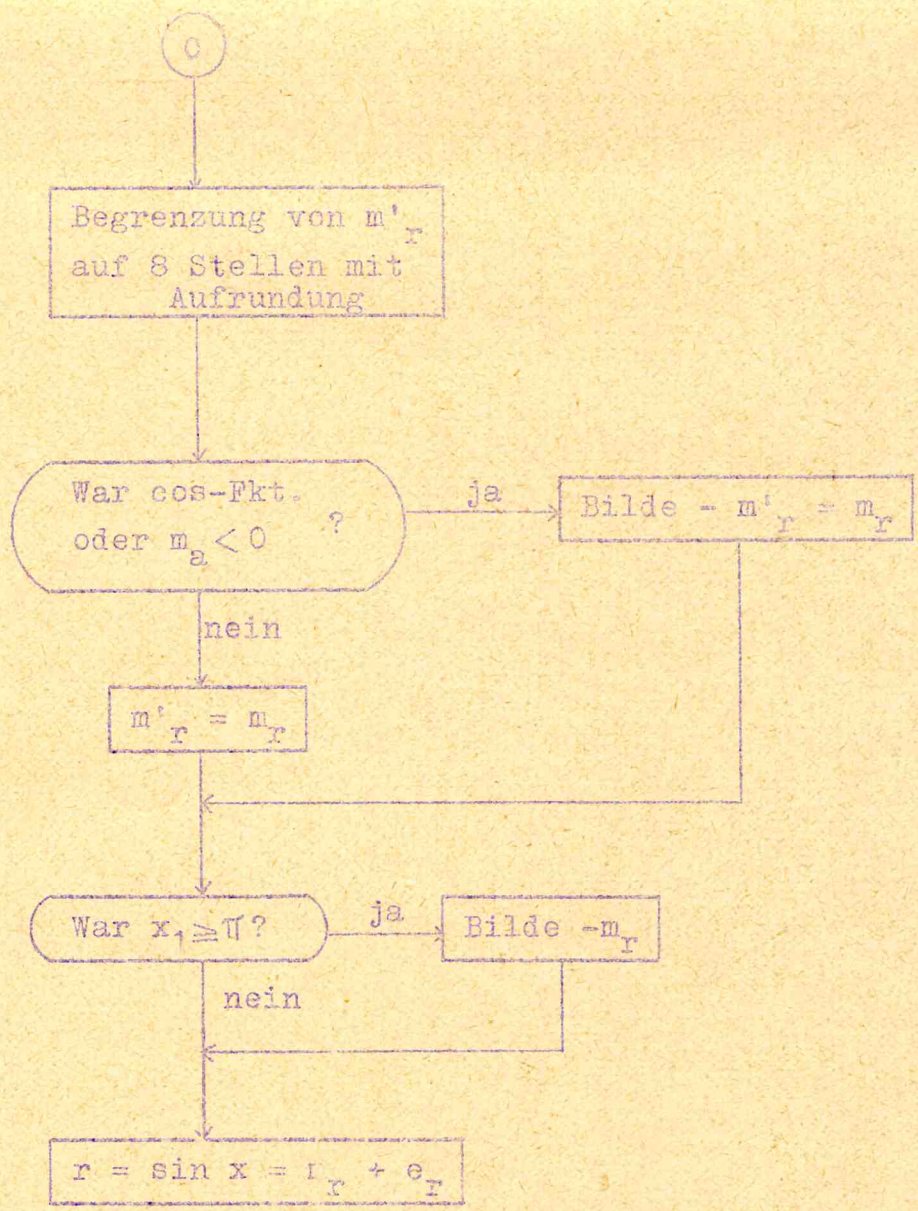
Bilde das Polynom

$$x \left[ b'_1 + x^2 \left[ b'_3 + 0,1x^2 \left[ b'_5 + 0,1x^2 \left[ b'_7 + 0,1x^2 b'_9 \right] \right] \right] \right]$$

= r'

mit:

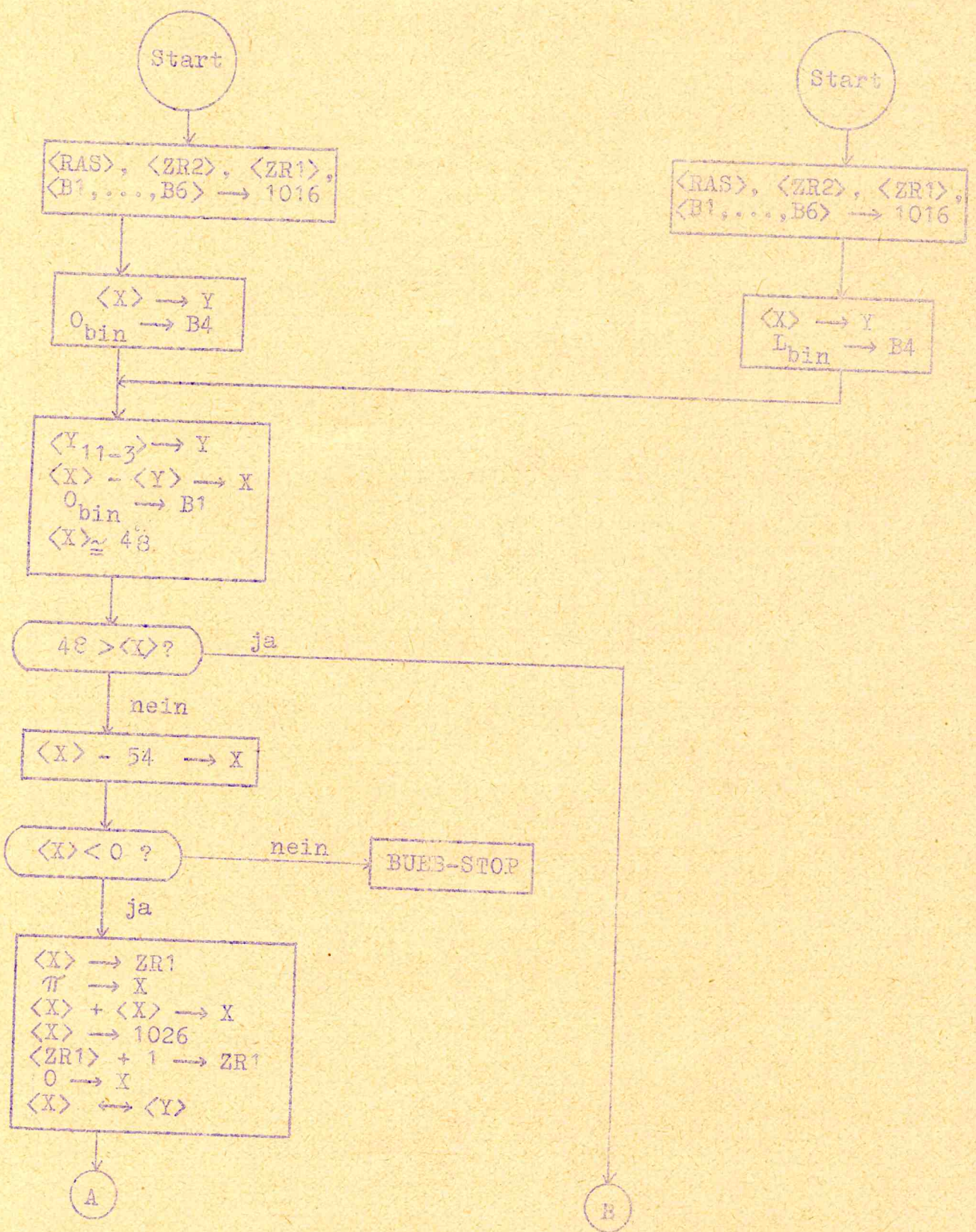
b'_1 =	b_1 =	0,999999 9765
b'_3 =	b_3 =	-0,166666 4759
b'_5 =	10 · b_5 =	0,083328 9922
b'_7 =	10 <sup>2</sup> · b_7 =	-0,019800 8652
b'_9 =	10 <sup>3</sup> · b_9 =	0,002590 4239

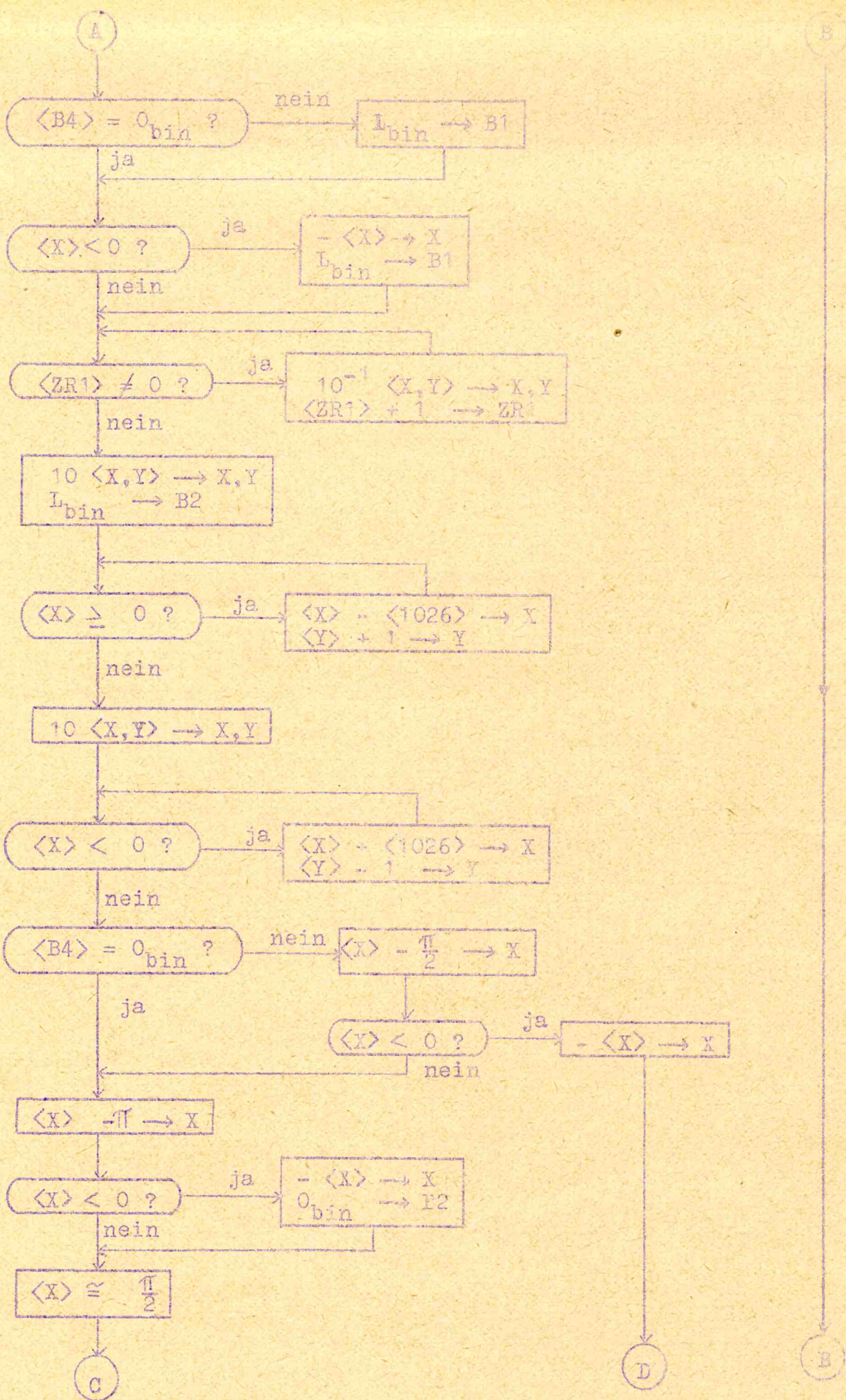


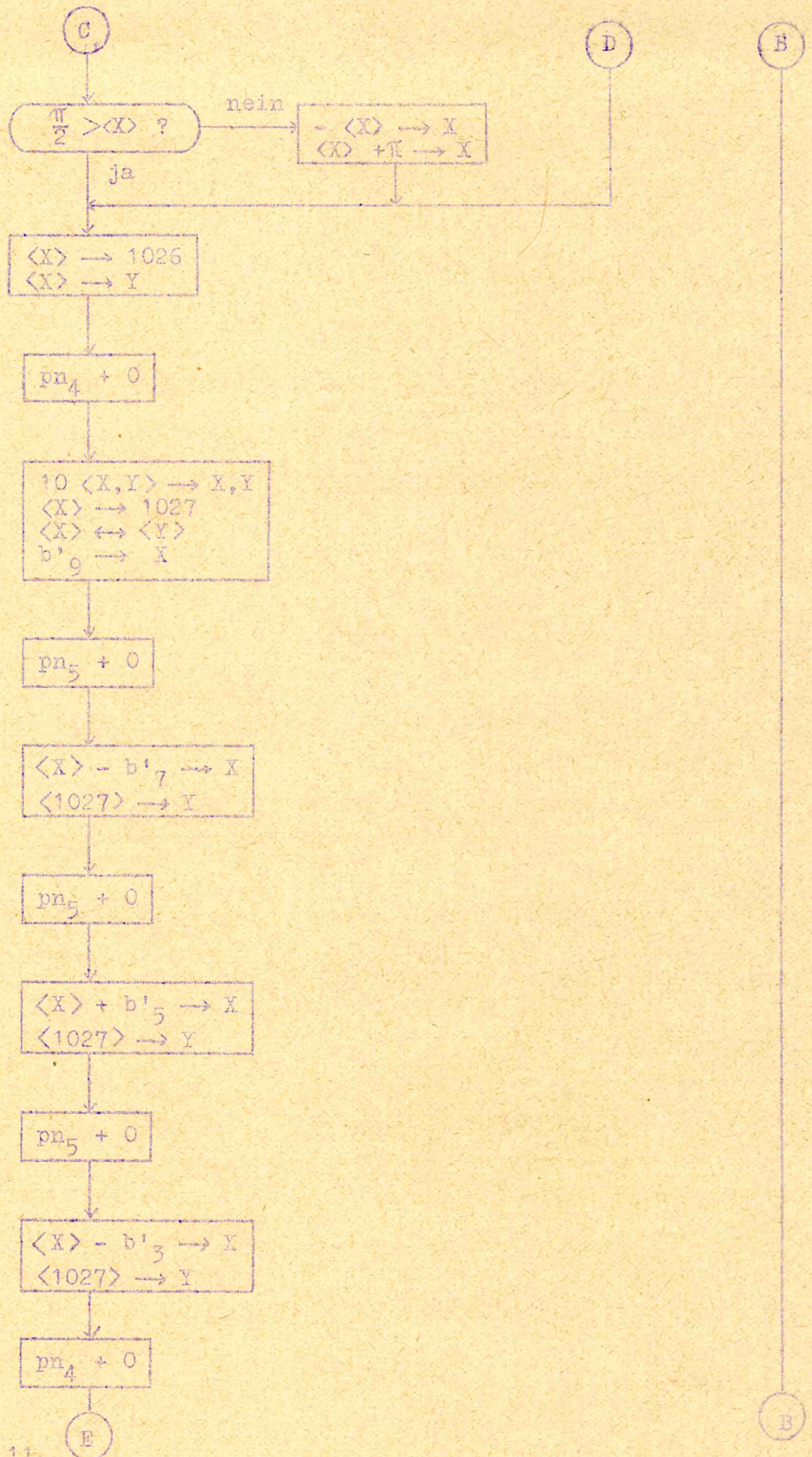


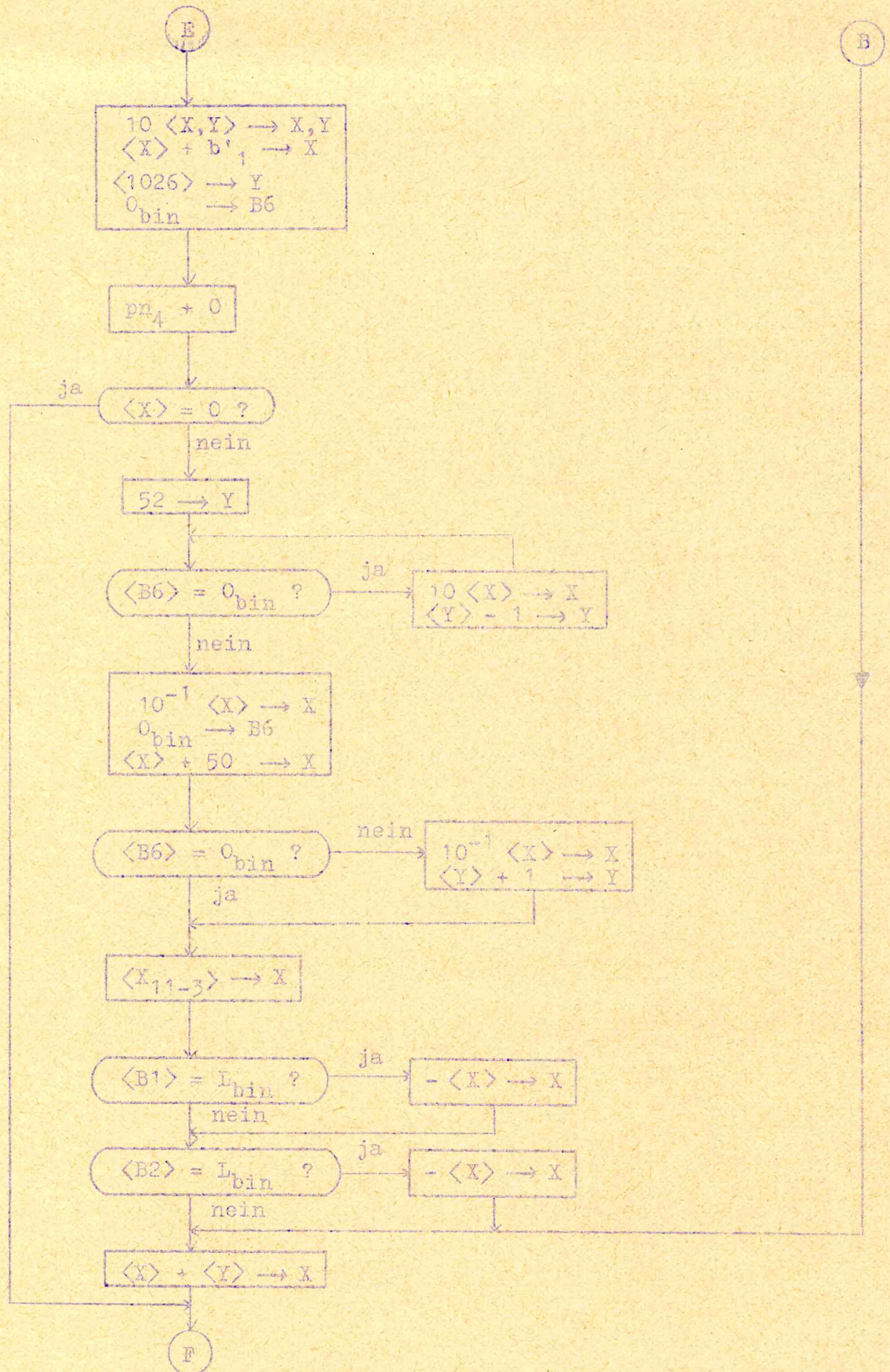
Sinusprogramm

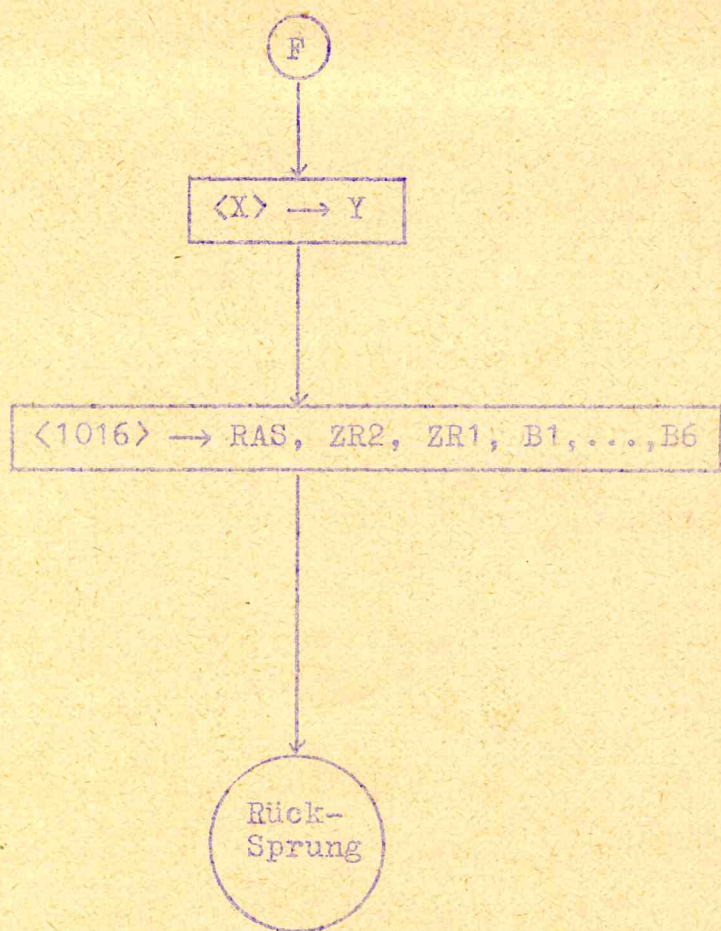
Cosinusprogramm











ZUSE Z 31/ 3		Programmvercodung					Dat. 24.1.62		
Programm		Berechnung der Sinusfunktion für Argumente im Gleitkomma SCA					Nr. 8		
Adresse		KeZ.	Beding.	Operation			Adr.	Bemerkungen	
$n_{12}^+$	0			T		F	1016		
	1	-		T		N4	6	$a \rightarrow Y$	
	2			U	M	C	Y	99 $m_a \rightarrow Y$	
	3	-		S		N1	6	$e_a \rightarrow X$	
	4			K		C	48	$e_a \cong 48'$	
	5		(GR)			P	$n_{12}^+$ 63		
	6			S		C	54	$e_a - 54' \rightarrow X$	
	7		(NE)			P	$n_{12}^+$ 9		
	8					F	P	. . . . BUEB	
	9			T			7	$e_a - 54' \rightarrow ZR1$	
	10			B		P	$n_{12}^+ + 11$		
	1	0	3	1	4	1	5	9	2 654 Konstante $\pi$
	2			A			4	$2\pi \rightarrow X$	
	3			T		V1	1 026	$2\pi \rightarrow 1026$	
	4			B			0	$0 \rightarrow X$	
	5			B			6	$m_a \rightarrow X$ $0 \rightarrow Y$	
	6		(N4)			P	$n_{12}^+ + 18$		
	7		-			J1		if cos a L $\rightarrow$ P	
	8		(NE)	T	M	J1	4	$ m_a  \rightarrow X$	
	9	(W)	(1Z)			RR	V1		
	20		-			LL	J2		
	1	(W)	(PO)	S			VY	1026	
	2					LL			
	3	(W)	(NE)	A			ZY	1026	
	4		(N4)			P	$n_{12}^+ + 27$		
	5			S		F	P	$n_{12}^+ + 69 \langle X \rangle - \frac{\pi}{2} \rightarrow X$	
	6		(NE)			P	P	$n_{12}^+ + 67 \langle X \rangle < 0$	
	7			S		F	P	$n_{12}^+ + 11 \langle X \rangle - \pi \rightarrow X$	
	8		(NE)	T	M	N2	4		
	9			K		F	P	$n_{12}^+ + 69$ $x_3 \cong \frac{\pi}{2}$	
progr.: Die		gepr.: La						Seite	

ZUSE Z 31/	Programmvercodung						Dat. 24.1.62	
Programm	Berechnung der Sinusfunktion für Argumente im Gleitkomma SCA						Nr. 8	
Adresse	KeZ.	Beding.	Operation			Adr.	Bemerkungen	
n <sub>12</sub> +30			(GE)			P	n <sub>12</sub> +33	Fall „=“ nicht möglich
1			T	M			4	
2			A		F	P	n <sub>12</sub> +31	π + (X) → X
3			T				1026	
4			T				6	
5					F	P	n <sub>4</sub> +0	→ FKM1
6			T	LL			1027	
7			B				6	
8			B			P	n <sub>12</sub> +39	
9	0	0	2	5	9	O	4299	b'9
40						F	n <sub>5</sub> +0	→ FKM2
1			S		F	P	n <sub>12</sub> +30	b'7
2			B			Y	1027	
3					F	P	n <sub>5</sub> +0	→ FKM2
4			A		F	P	n <sub>12</sub> +71	b'5
5			B			Y	1027	
6					F	P	n <sub>5</sub> +0	→ FKM2
7			S		F	P	n <sub>12</sub> +72	b'3
8			B			Y	1027	
9					F	P	n <sub>4</sub> +0	→ FKM1
50			A	LL	F	P	n <sub>12</sub> +73	b'1
1			B		N6	Y	1026	
2					F	P	n <sub>4</sub> +0	→ FKM1
3			(NU)			P	n <sub>12</sub> +64	
4			B		C	Y	52	
5	(7)	(N6)		L		ZY		
6				R	N6			
7			A		C		50	
8		(N6)				P	n <sub>12</sub> +60	
9				R		VY		
progr.: Die	gepr.: La						Seite	

ZUSE Z 31/	P r o g r a m m v e r c o d u n g							Dat 24.1.62	
Programm	<u>Berechnung der Sinusfunktion</u> für Argumente im Gleitkomma. SCA							Nr. 8	
Adresse	KeZ.	Beding.	Operation				Adr.	Bemerkungen	
n <sub>12</sub> <sup>+</sup> 60			J	M	C		99		
1		(J1)	F	M			4		
2		(J2)	T	M			4		
3			A				6		
4			T				6		
5			B		F		1016		
6						E	5		
7			T	M			4		
8						F	n <sub>12</sub> <sup>+</sup> 33		
9	0	1	5	7	0	7	9	6327	$\pi$ 2
70	0	0	1	9	8	0	0	8652	b'7
1	0	0	8	3	3	2	8	9922	b'5
2	0	1	6	6	6	6	6	4759	b'3
3	0	9	9	9	9	9	9	9765	b'1
progr.: Die	gepr.: Ia							Seite	



ZUSE Z 31/	P r o g r a m m v e r c o d u n g				Dat.	24.1.62	
Programm	<u>Berechnung der Cosinusfunktion</u> für Argumente in Gleitkomma SCA				Nr.	8	
Adresse	KeZ.	Beding.	Operation			Adr.	Bemerkungen
n <sub>13</sub> <sup>+</sup> 0 1 2		-	T T	F J4	P	1015 6 n <sub>12</sub> <sup>+</sup> 2	
progr.: Die	gepr.: La					Seite	

Reg.Nr.: Z 31.3/8.17