

Programm: Nr. 9 Berechnung der Arcustangens-,
Arcussinus- und Arcuscosinus-
funktion
für Argumente im Gleitkomma ARA

Aufgabenstellung:

Berechnung der Funktion $\arctg a$, $\arcsin a$, $\arccos a$,
a gegeben in der Gleitkommadarstellung

$$a = m_a \cdot 10^{e_a}$$

Voraussetzung:

1. Das Programm zur Berechnung der Arcustangensfunktion wird unter der Adresse n_{14}^{+7} ,
das Programm zur Berechnung der Arcussinusfunktion wird unter der Adresse n_{16} ,
das Programm zur Berechnung der Arcuscosinusfunktion wird unter der Adresse n_{17}
aufgerufen.
2. Vor Aufruf eines dieser Unterprogramme hat das Argument a im X-Register zu stehen.
Das Resultat $r = \arctg a$, bzw. $r = \arcsin a$
bzw. $r = \arccos a$ steht als normalisierte Gleitkommazahl sowohl im X- als auch im Y-Register zur Verfügung.
3. Im Programm werden folgende Schnellspeicherzellen benutzt:
1016 zur Umspeicherung des Rückkehradressenspeichers RAS, der beiden Zählregister ZR2, ZR1 und der Bedingungsspeicher B_1, \dots, B_6
1026 zum Auslagern des Indexregisters 1009
1027 als Zwischenspeicher.

4. Zur Durchführung dieses Unterprogrammes werden als weitere Unterprogramme vorausgesetzt:

| | |
|-----------|-----------------------------|
| FKM2 | Multiplikation im Festkomma |
| FKD2 | Division im Festkomma |
| FKQ | Quadratwurzel im Festkomma |
| BUEB-STOP | Druckprogramm |

Programmablauf:

Das Programm ist so aufgebaut, daß die Berechnung der Arcuscosinusfunktion auf die Berechnung der Arcussinusfunktion und diese wiederum auf die Berechnung der Arcustangensfunktion zurückgeführt wird. Dies geschieht nach den Umrechnungsformeln:

$$\arccos a = \frac{\pi}{2} - \arcsin a$$

$$\arcsin a = \frac{a}{|a|} \left[\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} \frac{|a| - \sqrt{1 - a^2}}{|a| + \sqrt{1 - a^2}} \right] \quad \text{für } -1 \leq a \leq 1$$

Die Berechnung der Arcustangensfunktion erfolgt aufgrund der Formel:

$$\operatorname{arctg} s = 0,05 \cdot n + 0,025 + c_1 p - c_3 p^3$$

$$\text{wobei : } p = 10^3 \left(\frac{t - t_0}{t + \frac{1}{t_0}} \right) = 10^3 \left(\frac{t - \alpha}{t + \beta} \right)$$

$$|p| \leq 0,625260508 = 10^3 t_0^2$$

$$t_0 = \alpha = \operatorname{tg} 0,025 = 0,025005209628$$

$$B = 39,99166633$$

$$c_1 = 0,0399916654$$

$$c_3 = 0,0000213100$$

Herleitung der Formel:

$\operatorname{arctg} a$ ist eine ungerade Funktion in a , daher gilt

$$\operatorname{arctg} a = \begin{cases} \operatorname{arctg} a & \text{für } a \geq 0 \\ -\operatorname{arctg} |a| & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Argumentreduktionen:

$$\text{Ist } |a| \geq 1, \text{ so gilt } \operatorname{arctg} |a| = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} \frac{|a| - 1}{|a| + 1}$$

$$\text{" } |a| < 1, \text{ " " } \operatorname{arctg} |a| = \operatorname{arctg} |a|$$

Da die Arcustanges-Reihe für ein Argument nahe bei 1 nur sehr langsam konvergiert, ist es vorteilhaft, den Argumentbereich nochmals zu reduzieren.

$$\text{Setze } s = \begin{cases} |a| & \text{für } |a| < 1 \\ \frac{|a| - 1}{|a| + 1} & \text{für } |a| \geq 1 \end{cases}$$

und es sei $\operatorname{arctg} s_n = 0,05 \cdot n$, dann ist

$$\operatorname{arctg} s = 0,05 \cdot n + \operatorname{arctg} \frac{s - s_n}{1 + s \cdot s_n}$$

Danach gilt für $s_n \leq s < s_{n+1}$

$$0 \leq \frac{s - s_n}{1 + s \cdot s_n} < \operatorname{tg} 0,05 = 0,0500417084$$

Setzt man $\frac{s - s_n}{1 + s \cdot s_n} = t$ und ist $\operatorname{arctg} t_0 = 0,025$,

$$\text{dann ist } \operatorname{arctg} t = 0,025 + \operatorname{arctg} \frac{t - t_0}{1 + t \cdot t_0}$$

und es gilt für $0 \leq t < \frac{2t_0}{1 - t_0}$

$$- t_0 \leq \frac{t - t_0}{1 + t \cdot t_0} \leq t_0 = \operatorname{tg} 0,025 = 0,025005209628$$

Nun ist das Hilfsargument $\frac{t-t_0}{1+t \cdot t_0}$ durch ein solches Approximationspolynom in $\left(\frac{t-t_0}{1+t \cdot t_0}\right)$ zu ersetzen, daß der Fehler $|R_n|$ kleiner als $0,5 \cdot 10^{-8}$ bleibt.

Dazu setzt man $\frac{t-t_0}{1+t \cdot t_0} = t_0 \cdot \cos \vartheta$ und findet aus der Arcustangensreihe nach Umordnung der Potenzen von $\cos^{2n+1} \vartheta$

$$\operatorname{arctg} t_0 \cos \vartheta = c_1 \cdot \cos \vartheta - c_3 \cos 3 \vartheta + c_5 \cdot \cos 5 \vartheta - + \dots$$

Dabei ist $c_5 = \frac{t_0^5}{80} \left(1 - \frac{5}{4} t_0^2 + - \dots\right)$.

Für $t_0 = \operatorname{tg} 0,025$ wird $c_5 \sim 1,22 \cdot 10^{-10}$,

die Reihe kann daher nach dem 2. Glied abgebrochen werden.

Setzt man $\cos \vartheta = \frac{1}{t_0^2} \left(\frac{t-t_0}{t - \frac{1}{t_0}}\right)$ und $\cos 3 \vartheta = 4 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta$,

so erhält man schließlich:

$$\operatorname{arctg} t = 0,025 + c_1 \cdot p - c_3 \cdot p^3, \text{ mit } p = 10^3 \left(\frac{t-t_0}{t + \frac{1}{t_0}}\right)$$

und für $\operatorname{arctg} s = 0,05 \cdot n + \operatorname{arctg} t$

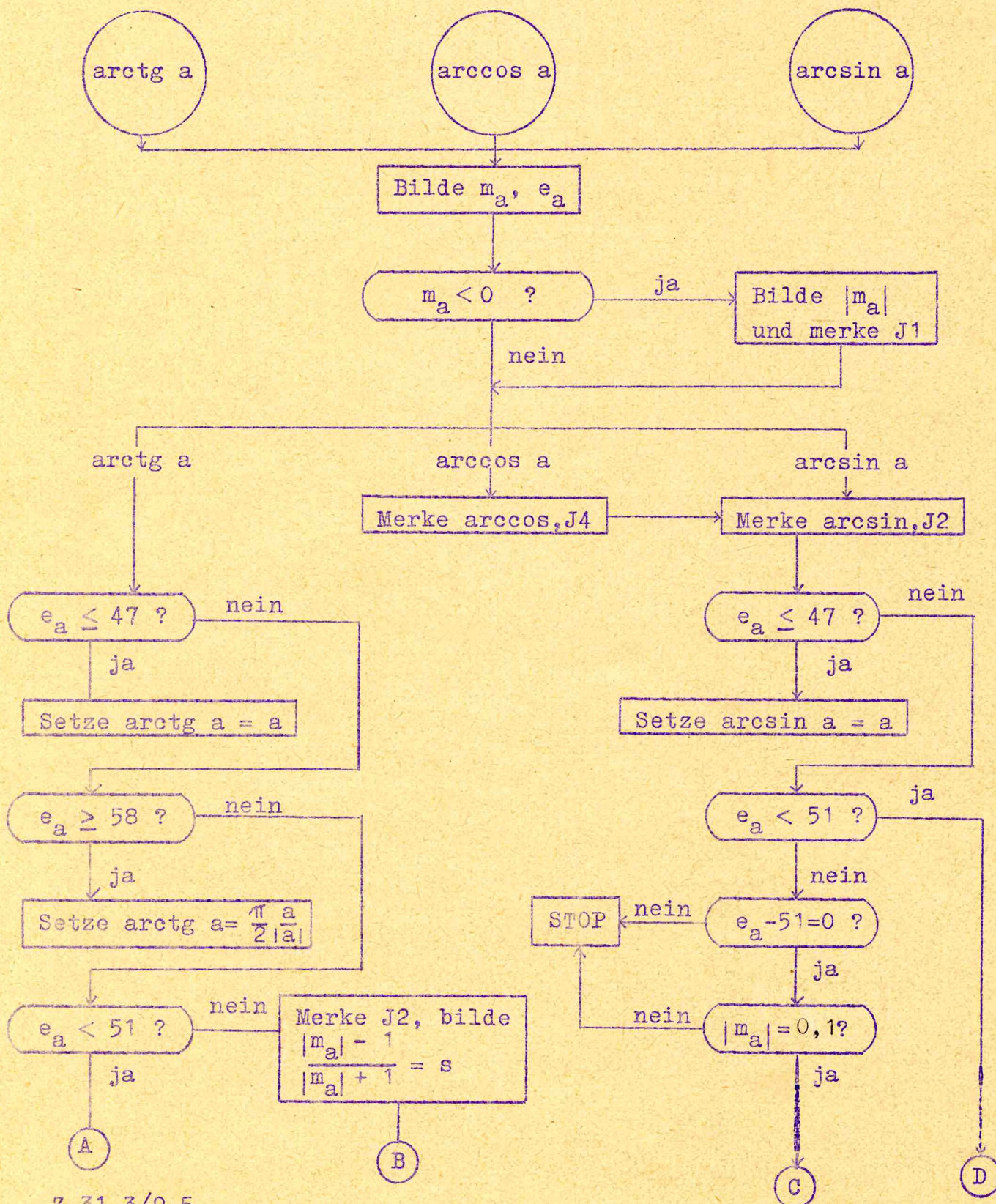
$$\operatorname{arctg} s = 0,05 \cdot n + 0,025 + c_1 \cdot p - c_3 \cdot p^3$$

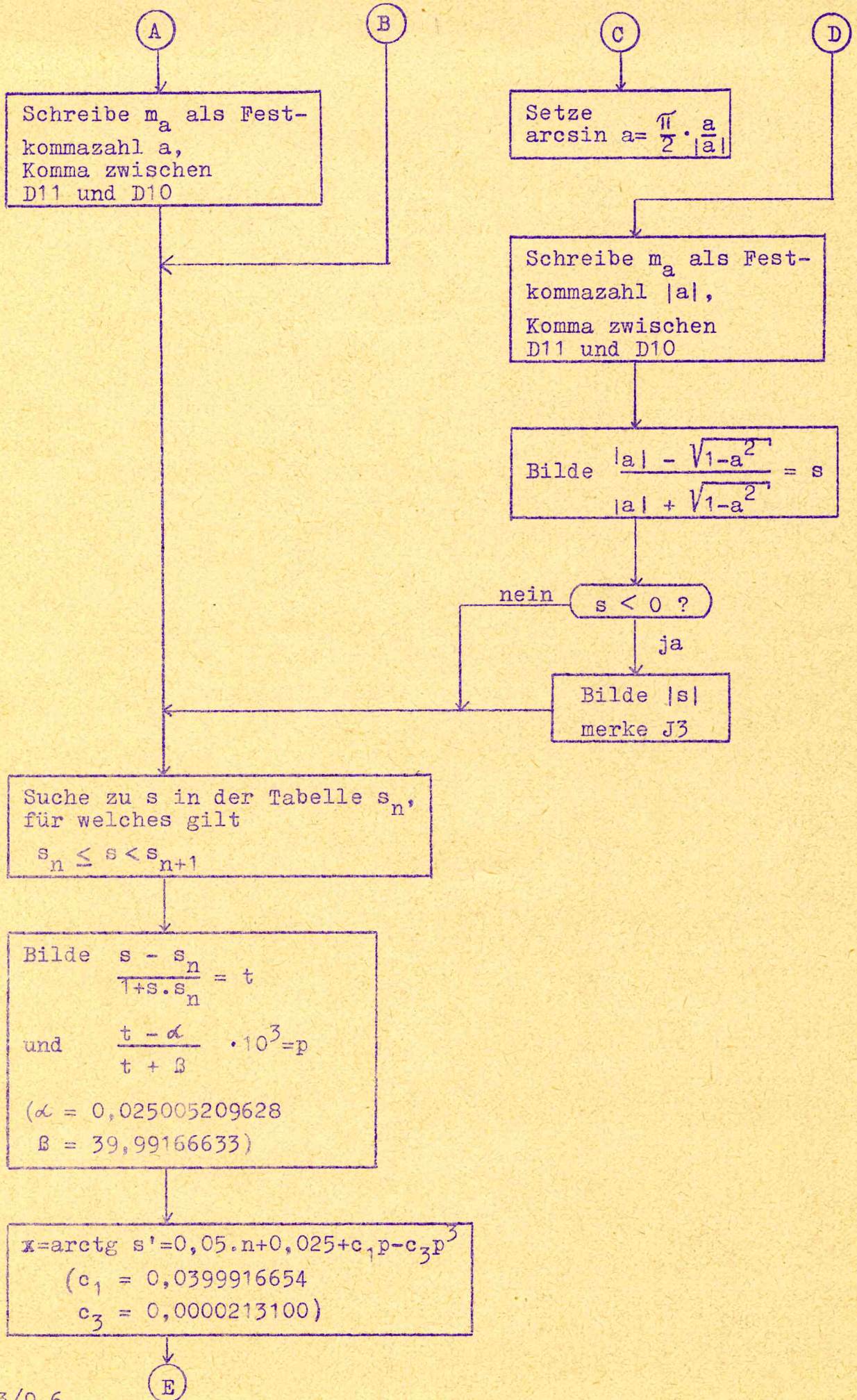
q.e.d.

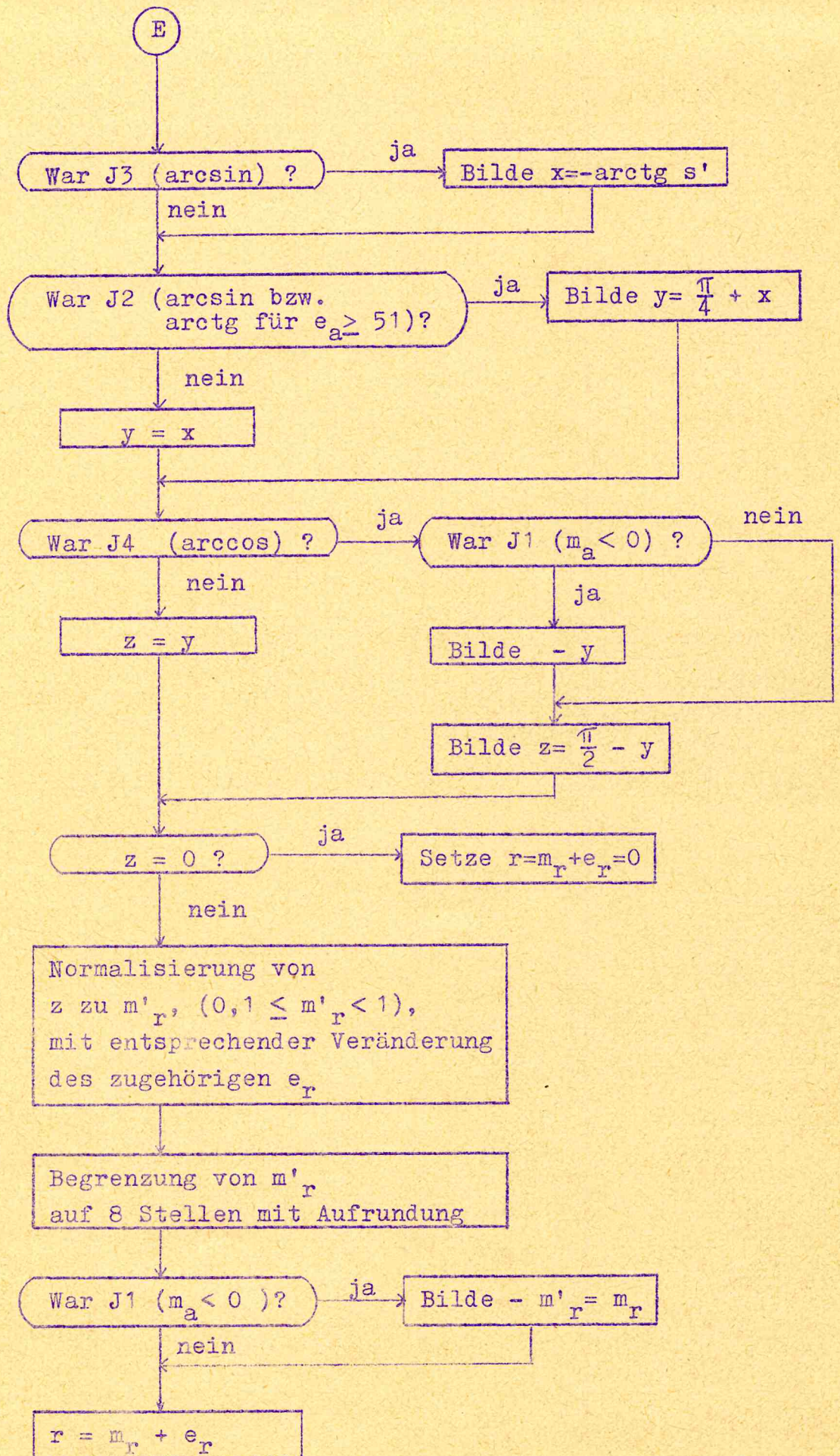
Der Programmablauf im einzelnen ist aus der nachfolgenden schematischen Übersicht zu ersehen.

Programm: Nr. 9

Berechnung der Arcustangens-,
Arcussinus- und Arcuscossinus-
funktion
für Argumente im Gleitkomma ARA



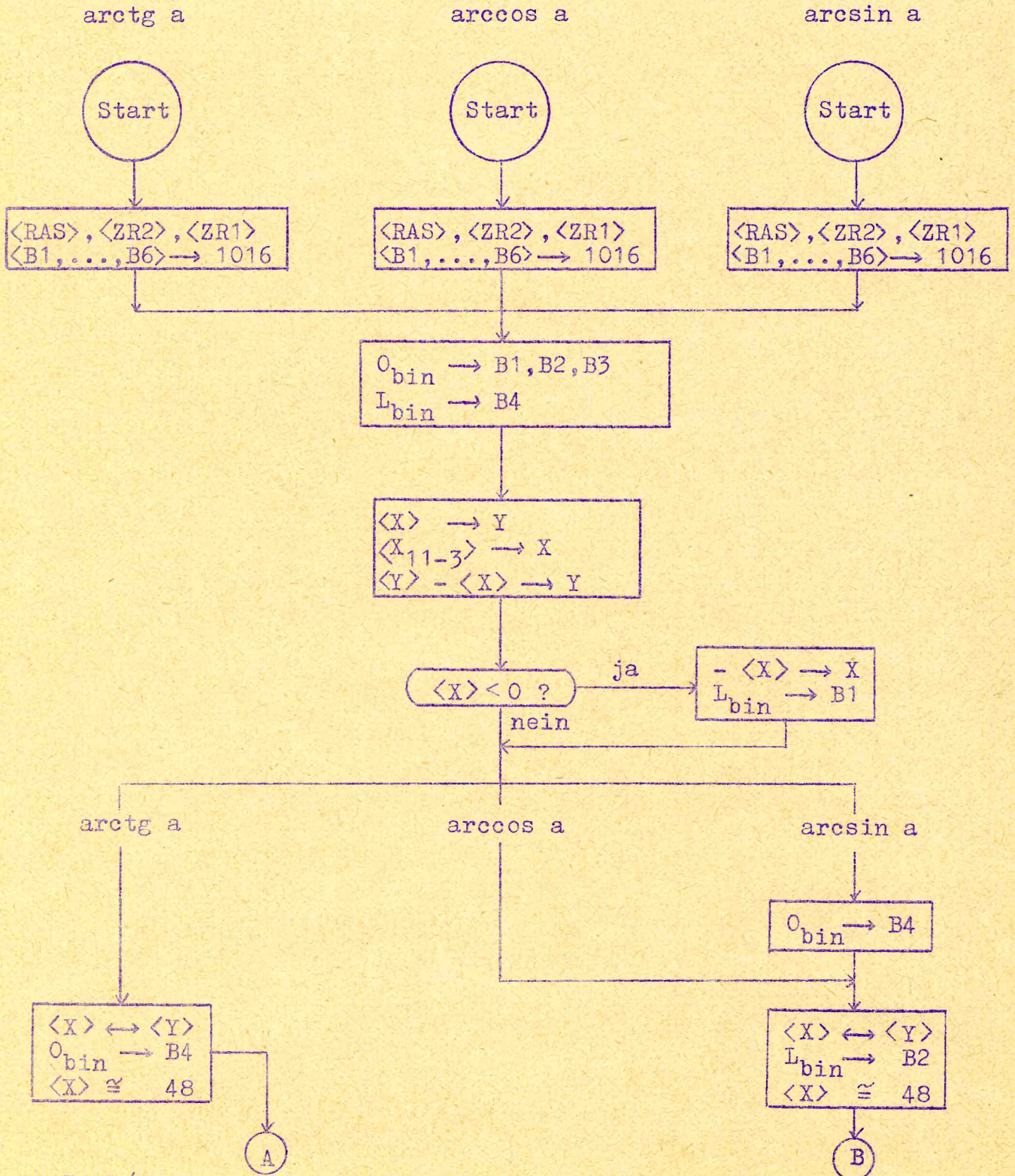


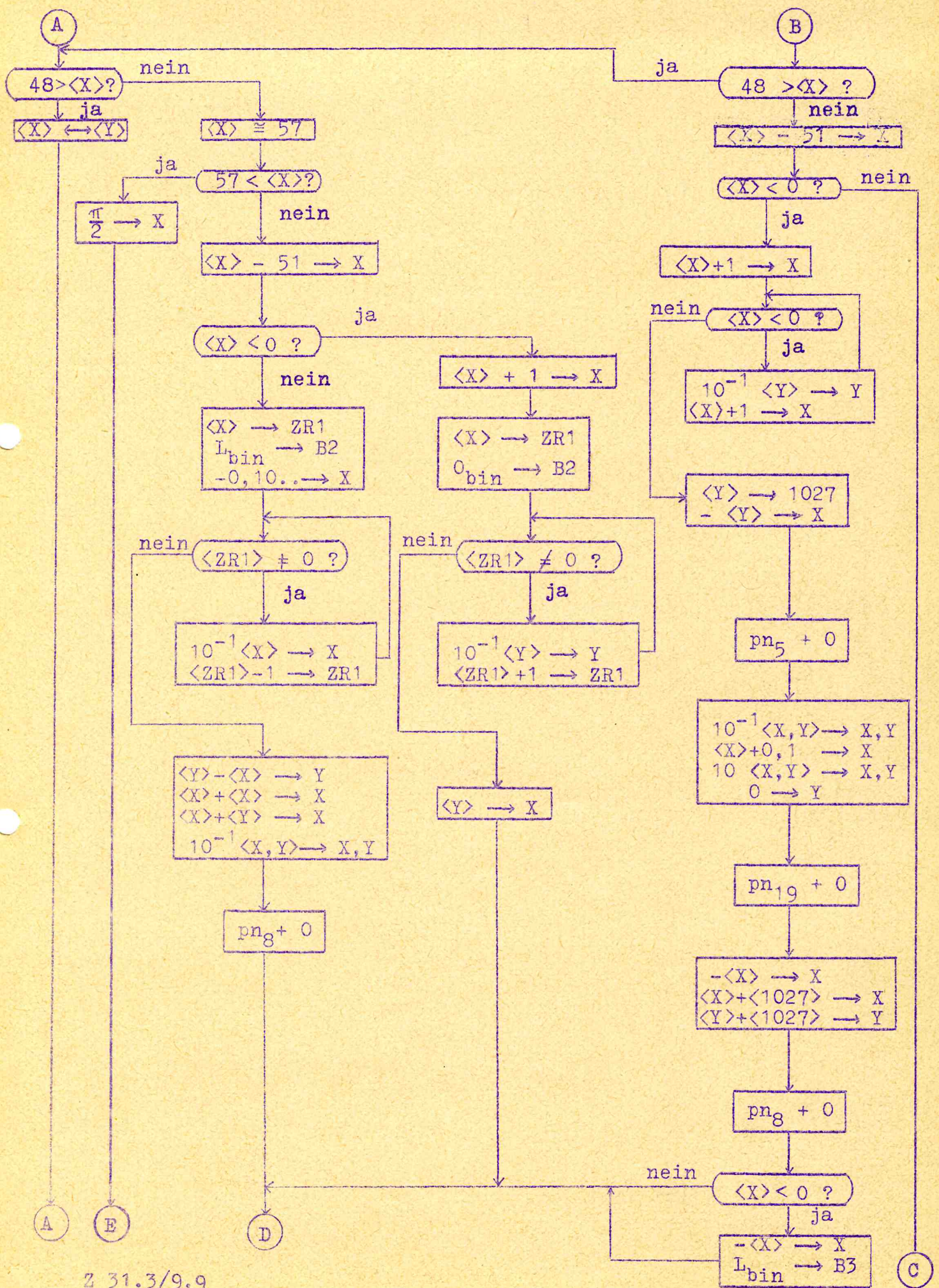


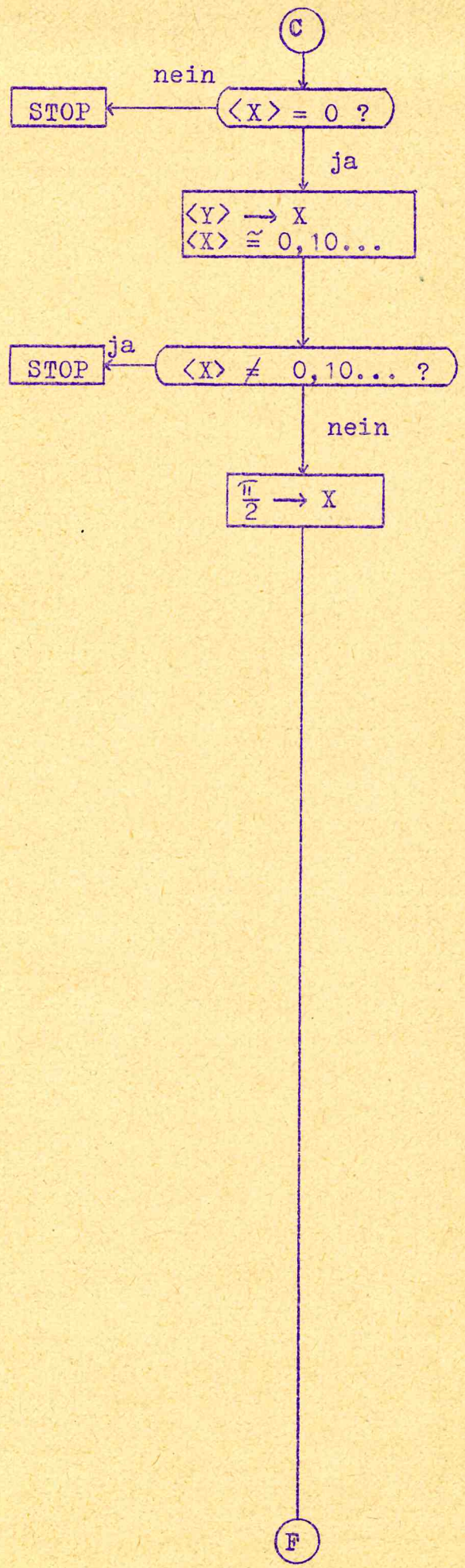
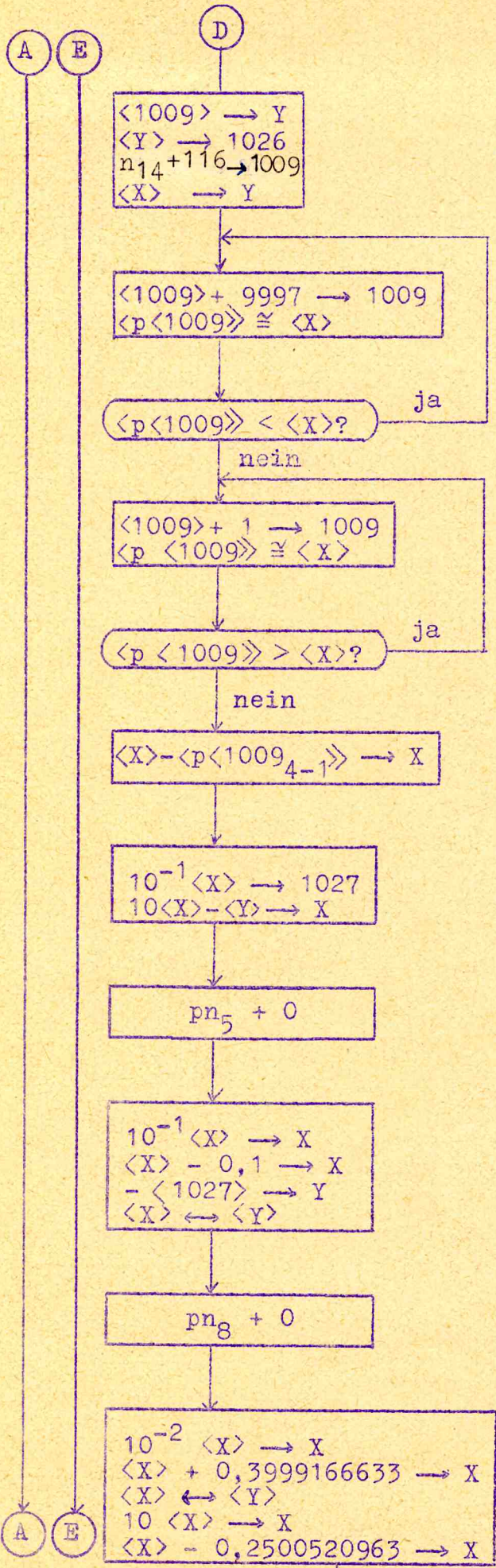
Programm: Nr. 9

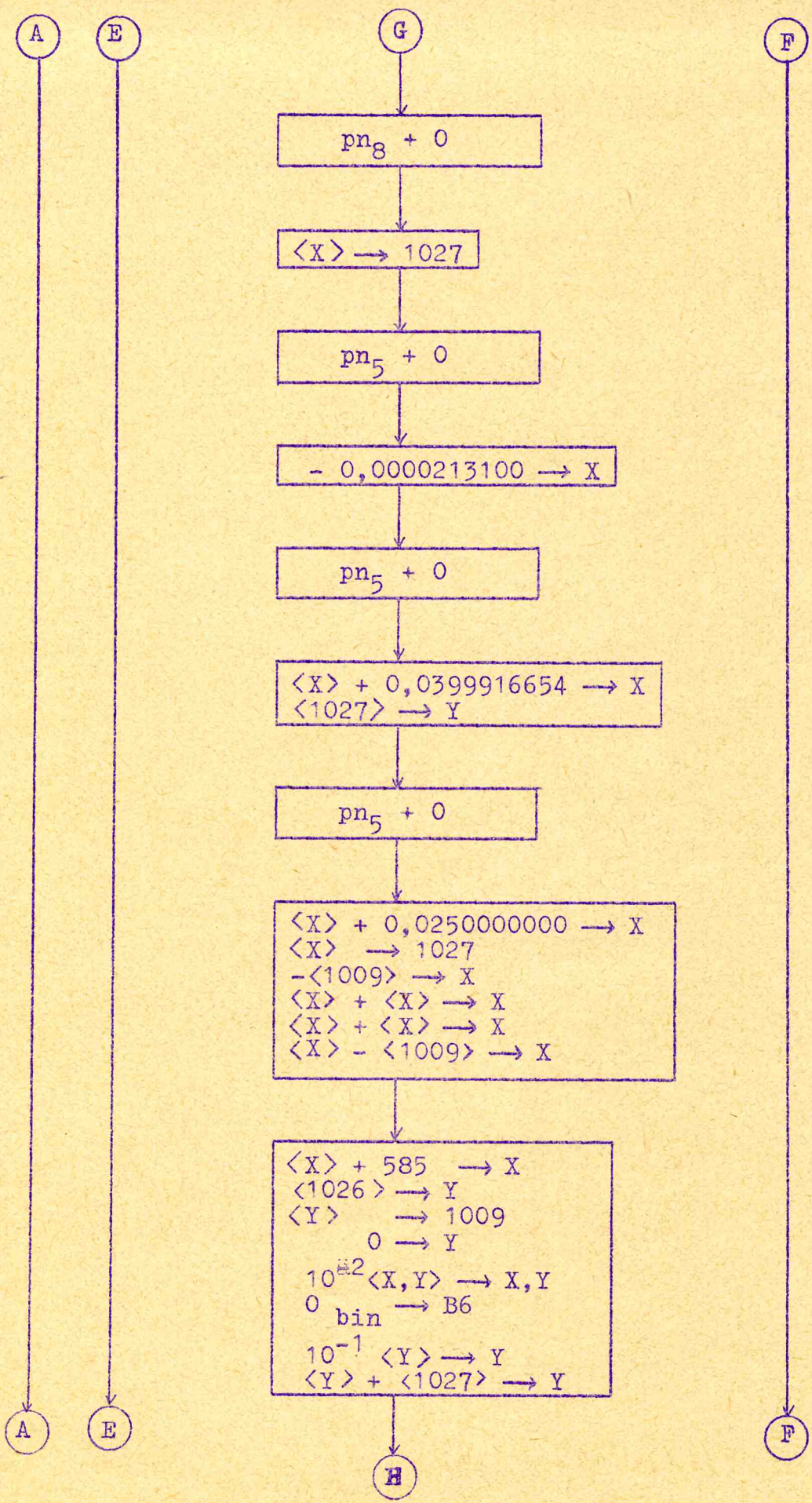
Berechnung der Arcustangens-,
Arcussinus- und Arcuscotinus-
funktion
für Argumente im Gleitkomma

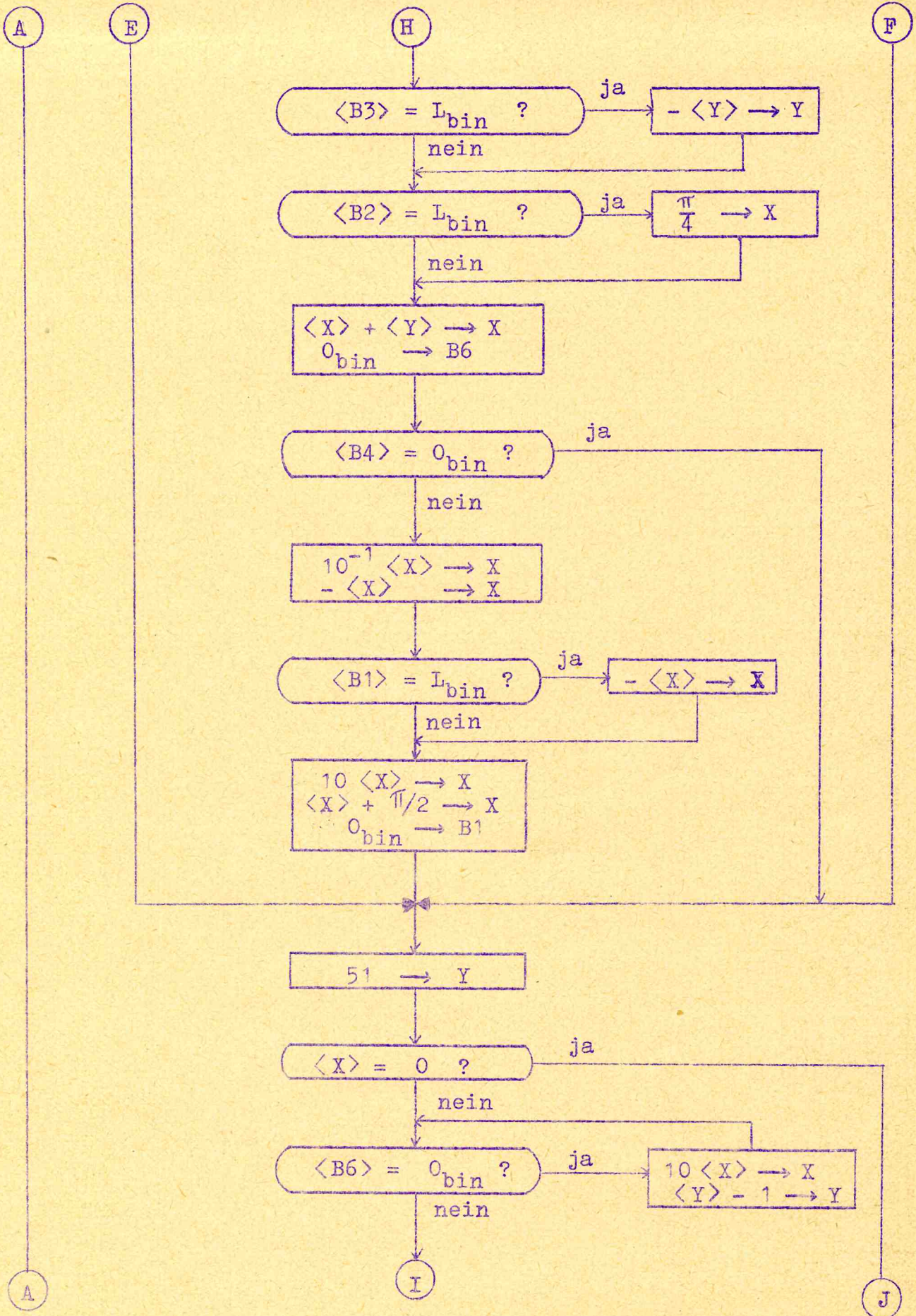
Voraussetzung: $a = m_a \cdot 10^{e_a} = \langle X \rangle$

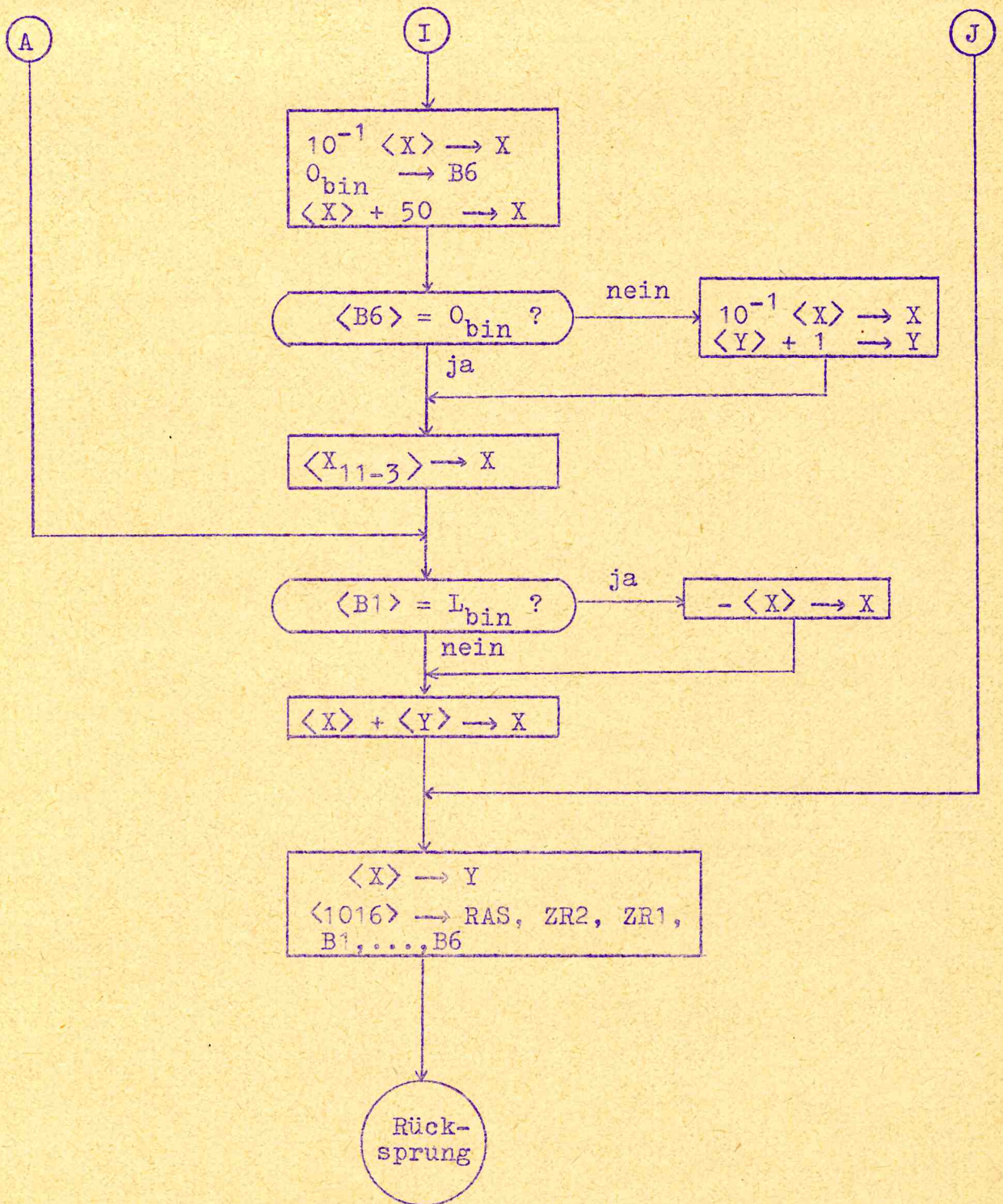












| ZUSE Z 31/ 3 | | Programmvercodung | | | | | Dat. 8.2.62 | | |
|-------------------|----|--|---------|-----------|-----|----|-------------|----------------------|---|
| Programm | | <u>Arcustangensfunktion</u> für Argumente im Gleitkomma ARA | | | | | Nr. 9 | | |
| Adresse | | KeZ. | Beding. | Operation | | | Adr. | Bemerkungen | |
| n ₁₄ + | 0 | | | B | | C | Y | 5 | } O _{bin} → B1, B2, B3 |
| | 1 | | | T | | | Y | 10 | |
| | 2 | | | T | | | | 6 | |
| | 3 | | | U | M | C | | 99 | m _a → X |
| | 4 | | | S | | | Y | 4 | e _a → Y |
| | 5 | | (NE) | T | M | J1 | | 4 | |
| | 6 | | | | | | | 5 | |
| | 7 | | | T | | F | | 1016 | |
| | 8 | | | | | F | P | n ₁₄ +0 | |
| | 9 | | - | B | | N4 | | 6 | e _a → X; |
| | 10 | | | K | | C | | 48 | m _a → Y |
| | 1 | | (GR) | | | | P | n ₁₄ +89 | |
| | 2 | | | K | | C | | 57 | |
| | 3 | | (KL) | | | | P | n ₁₄ +91 | |
| | 4 | | | S | | C | | 51 | |
| | 5 | | (NE) | | | VX | P | n ₁₄ +94 | |
| | 6 | | - | T | | J2 | | 7 | |
| | 7 | | | B | M | F | P | n ₁₄ +98 | k ₀ =0, 10...0 |
| | 8 | (W) | (1Z) | | | R | Z1 | | |
| | 9 | | | S | | | Y | 4 | m _a + 1 → Y |
| | 20 | | | A | | | | 4 | - 2 → X |
| | 1 | | | A | | | | 6 | m _a - 1 → X |
| | 2 | | | | RR | F | P | n ₈ + 0 | → FKD2 |
| | 3 | | | B | | | Y | 1009 | $\frac{ a - 1}{ a + 1} = s \rightarrow X$ |
| | 4 | | | T | | | Y | 1026 | |
| | 5 | | | B | | C | Y | n ₁₄ +116 | k + 18 |
| | 6 | | | T | | | Y | 1009 | k+18 → 1009 |
| | 7 | | | T | | | | 6 | |
| | 8 | | | K | 9'+ | F | P | 9997 | $s = \frac{m_a - 1}{m_a + 1} \rightarrow Y$ |
| | 9 | | (KL) | | | | P | n ₁₄ +28 | |

progr.: Die

gepr.:

Seite 1/4

Reg.Nr.: Z 31.3/9.14

| ZUSE Z 31/3 | | Programmvercodung | | | | | Dat. 8.2.62 | |
|-------------|-----|---|---------|-----------|-----|---|-------------|--------------|
| Programm | | Arcustangensfunktion für Argumente im Gleitkomma ARA | | | | | Nr. 9 | |
| Adresse | | KeZ. | Beding. | Operation | | | Adr. | Bemerkungen |
| $n_{14} +$ | 30 | | | K | 9'+ | F | P | 1 |
| | 1 | | (GR) | | | | P | $n_{14}+30$ |
| | 2 | G | | S | | F | P | 1009 |
| | 3 | | | T | R | | | 1027 |
| | 4 | | | S | L | | | 6 |
| | 5 | | | | | F | P | $n_5 + 0$ |
| | 6 | | | S | R | F | P | $n_{14}+98$ |
| | 7 | | | B | M | | Y | 1027 |
| | 8 | | | B | | | | 6 |
| | 9 | | | | | F | P | $n_8 + 0$ |
| | 40 | | | | R | | | |
| | 1 | | | A | R | F | P | $n_{14}+118$ |
| | 2 | | | B | | | | 6 |
| | 3 | | | S | L | F | P | $n_{14}+120$ |
| | 4 | | | | | F | P | $n_8 + 0$ |
| | 5 | | | T | | | | 1027 |
| | 6 | | | | | F | P | $n_5 + 0$ |
| | 7 | | | B | M | F | P | $n_{14}+75$ |
| | 8 | | | | | F | P | $n_5 + 0$ |
| | 9 | | | A | | F | P | $n_{14}+119$ |
| | 50 | | | B | | | Y | 1027 |
| | 1 | | | | | F | P | $n_5 + 0$ |
| | 2 | | | A | | F | P | $n_{14}+99$ |
| | 3 | | | T | | | | 1027 |
| | 4 | | | B | M | | | 1009 |
| | 5 | | | A | | | | 4 |
| | 6 | | | A | | | | 4 |
| | 7 | | | S | | | | 1009 |
| | 8 | | | A | | F | P | $n_{16}+28$ |
| | 9 | | | B | | | Y | 1026 |
| progr.: | Die | gepr.: | | | | | | |
| | | | | | | | | Seite 2/4 |

| ZUSE Z 31/3 | | Programmvercodung | | | | | Dat. 8.2.1962 | | |
|------------------------------|----|--|---------|-----------|----|----|---------------|----------------------------------|--|
| Programm | | <u>Arcustangensfunktion</u> für Argumente im Gleitkomma ARA | | | | | Nr. 9 | | |
| Adresse | | KeZ. | Beding. | Operation | | | Adr. | Bemerkungen | |
| n ₁₄ ⁺ | 60 | | | T | | | Y | 1009 | |
| | 1 | | | B | | | Y | 0 | |
| | 2 | | | | RR | | | | |
| | 3 | | - | | RR | N6 | | | |
| | 4 | | | A | R | | Y | 1027 | |
| | 5 | | (J3) | T | M | | Y | 6 | |
| | 6 | | (J2) | B | | F | P | n ₁₄ ⁺ 100 | |
| | 7 | | - | A | | N6 | | 6 | |
| | 8 | | (N4) | | | | P | n ₁₄ ⁺ 76 | |
| | 9 | | | | R | | | | |
| | 70 | | | T | M | | | 4 | |
| | 1 | | (J1) | T | M | | | 4 | |
| | 2 | | | A | L | F | P | n ₁₄ ⁺ 100 | |
| | 3 | | | A | | F | P | n ₁₄ ⁺ 100 | |
| | 4 | | | | | N1 | P | n ₁₄ ⁺ 76 | |
| | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 3100 | |
| | 6 | | | B | | C | Y | 51 | |
| | 7 | | | | | | P | n ₁₄ ⁺ 86 | |
| | 8 | (W) | (N6) | | L | | ZY | | |
| | 9 | | - | | R | N6 | | | |
| | 80 | | | A | | C | | 50 | |
| | 1 | | (N6) | | | | P | n ₁₄ ⁺ 83 | |
| | 2 | | | | R | | VY | | |
| | 3 | | | U | M | C | | 99 | |
| | 4 | | (J1) | T | M | | | 4 | |
| | 5 | | | A | | | | 6 | |
| | 6 | | | T | | | | 6 | |
| | 7 | | | B | | F | | 1016 | |
| | 8 | | | | | | E | 5 | |
| | 9 | | | B | | | | 6 | |
| progr.: Die | | gepr.: | | | | | | Seite 3/4 | |

| ZUSE Z 31/3 | Programmvercodung | | | | | | | Dat. 8.2.1962 | |
|----------------------|--|---------|---|-----------|---|----|------|----------------------|--------------------|
| Programm | <u>Arcustangensfunktion</u> für Argumente im Gleitkomma | | | | | | | ARA | Nr. 9 |
| Adresse | KeZ. | Beding. | | Operation | | | Adr. | Bemerkungen | |
| n ₁₄ + 90 | | | | | | | P | n ₁₄ +84 | |
| 1 | | | | B | | F | P | n ₁₄ +100 | |
| 2 | | | | A | | | | 4 | |
| 3 | | | | | | | P | n ₁₄ +76 | |
| 4 | | | | T | | N2 | | 7 | |
| 5 | (W) | (1Z) | | | R | V1 | Y | | |
| 6 | | | | T | | | Y | 4 | |
| 7 | | | | | | | P | n ₁₄ +23 | |
| 8 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0000 | "1" |
| 9 | 0 | 0 | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0000 | "c ₀ " |
| 100 | 0 | 7 | 8 | 5 | 3 | 9 | 8 | 1634 | "π/4" |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0000 | |
| 2 | 0 | 9 | 3 | 1 | 5 | 9 | 6 | 4599 | tg 0,05.15 |
| 3 | 0 | 8 | 4 | 2 | 2 | 8 | 8 | 3805 | " .14 |
| 4 | 0 | 7 | 6 | 0 | 2 | 0 | 4 | 3991 | .13 |
| 5 | 0 | 6 | 8 | 4 | 1 | 3 | 6 | 8083 | .12 |
| 6 | 0 | 6 | 1 | 3 | 1 | 0 | 5 | 2133 | .11 |
| 7 | 0 | 5 | 4 | 6 | 3 | 0 | 2 | 4898 | .10 |
| 8 | 0 | 4 | 8 | 3 | 0 | 5 | 5 | 0656 | .9 |
| 9 | 0 | 4 | 2 | 2 | 7 | 9 | 3 | 2187 | .8 |
| 110 | 0 | 3 | 6 | 5 | 0 | 2 | 8 | 4948 | .7 |
| 1 | 0 | 3 | 0 | 9 | 3 | 3 | 6 | 2496 | .6 |
| 2 | 0 | 2 | 5 | 5 | 3 | 4 | 1 | 9212 | .5 |
| 3 | 0 | 2 | 0 | 2 | 7 | 1 | 0 | 0355 | .4 |
| 4 | 0 | 1 | 5 | 1 | 1 | 3 | 5 | 2181 | .3 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 3 | 4 | 6721 | .2 |
| 6 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 4 | 1 | 7084 | .1 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0000 | tg 0,05.0 |
| 8 | 0 | 3 | 9 | 9 | 9 | 1 | 6 | 6633 | B.10 ⁻² |
| 9 | 0 | 0 | 3 | 9 | 9 | 9 | 1 | 6654 | c ₁ |
| 120 | 0 | 2 | 5 | 0 | 0 | 5 | 2 | 0963 | d. 10 |
| progr.: Die | gepr.: | | | | | | | Seite 4/4 | |

| ZUSE Z 31/3 | | Programmvercodung | | | | | Dat. 8.2.62 | | |
|------------------------------|----|--|---------|-----------|----|------|---------------------------------|---------------------|--|
| Programm | | <u>Arcussinusfunktion</u> für Argumente im Gleitkomma | | | | | ARA Nr. 9 | | |
| Adresse | | KeZ. | Beding. | Operation | | | Adr. | Bemerkungen | |
| n ₁₆ ⁺ | 0 | | | T | | F | 1016 | | |
| | 1 | | | | | F P | n ₁₄ ⁺ 0 | | |
| | 2 | | | | | N4 | | | |
| | 3 | | | B | | J2 | 6 | | |
| | 4 | | | K | | C | 48 | | |
| | 5 | | (GR) | | | P | n ₁₄ ⁺ 89 | | |
| | 6 | | | S | | C | 51 | | |
| | 7 | | (NE) | | | VX P | n ₁₆ ⁺ 14 | | |
| | 8 | | (NU) | | | P | n ₁₆ ⁺ 10 | | |
| | 9 | | | | | F P | | STOP | |
| | 10 | | | T | | Y | 4 | | |
| | 1 | | | K | | F P | n ₁₄ ⁺ 98 | | |
| | 2 | | (NG) | | | F P | | STOP | |
| | 3 | | | | | P | n ₁₄ ⁺ 91 | | |
| | 4 | (W) | (NE) | | R | VX Y | | | |
| | 5 | | | T | | Y | 1027 | | |
| | 6 | | | T | M | Y | 4 | | |
| | 7 | | | | | F P | n ₅ ⁺ 0 | FKM2 | |
| | 8 | | | A | RR | F P | n ₁₄ ⁺ 98 | | |
| | 9 | | | | LL | | | | |
| | 20 | | | B | | Y | 0 | | |
| | 1 | | | | | F P | n ₁₉ ⁺ 0 | | |
| | 2 | | | T | M | | 4 | | |
| | 3 | | | A | | | 1027 | | |
| | 4 | | | A | | Y | 1027 | | |
| | 5 | | | | | F P | n ₈ ⁺ 0 | FKD2 | |
| | 6 | | (NE) | T | M | J3 | 4 | | |
| | 7 | | | | | P | n ₁₄ ⁺ 23 | | |
| | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | n+585 | n=5.n ₁₄ | |
| progr.: Die | | gepr.: | | | | | | Seite 1/1 | |

| | | | | | | | |
|------------------------------|--|---------|-----------|---|------|--------------------------------|-------------|
| ZUSE Z 31/ 3 | Programmvercodung | | | | Dat. | 8.2.62 | |
| Programm | <u>Arcuscosinusfunktion</u> für Argumente im Gleitkomma | | | | ARA | Nr. 9 | |
| Adresse | KeZ. | Beding. | Operation | | | Adr. | Bemerkungen |
| n ₁₇ ⁺ | 0 | | T | F | | 1016 | |
| | 1 | | | F | P | n ₁₄ ⁺ 0 | |
| | 2 | | | | P | n ₁₆ ⁺ 3 | |
| progr.: | Die | gepr.: | | | | Seite | 1/1 |

Reg.Nr.: Z 31.3/9.19